Teoretická část - 14.6.2021

1. (a) Definujte Taylorův polynom funkcí více proměnnných a Hessovu matici ($2,5$ bodu).

   (b) Zformulujte větu o Peanově tvaru zbytku a větu o postačující podmínce pro extrém (2 body).

   (c) Větu o postačující podmínce pro extrém dokažte ($1,5$ bodu).

   (d) Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

      i. je-li $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ a $H_f(0,-3)$ je negativně definitní, potom f má v bodě $(0,-3)$ lokální maximum,

      ii. je-li $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ a $H_f(0,-3)$ je negativně definitní, potom existuje lineární funkce $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, že funkce $f+g$ má v bodě $(0,-3)$ lokální maximum,

      iii. je-li $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ a $H_f(0,-3)$ je negativně definitní, potom existuje právě jedna lineární funkce $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, že funkce $f+g$ má v bodě $(0,-3)$ lokální maximum

   (2 body).

   Poznámka: funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nazveme lineární, pokud platí $f(ax+by) = af(x) + bf(y)$, $a,b \in \mathbb{R}$, $x,y \in \mathbb{R}^2$.

2. (a) Definujte číselnou řadu, její součet a absolutní konvergenci (3 body).

   (b) Zformulujte a dokažte větu o vztahu absolutní konvergence a konvergence $(2,5$ bodu).

   (c) Zformulujte a dokažte větu o nutné podmínce pro konvergenci řady (1 bod).

   (d) Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ jsou řady reálných čísel. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

      i. pokud řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje a řada $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konverguje, potom řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ konverguje,

      ii. pokud řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje a řada $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konverguje absolutně, potom řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ konverguje,

      iii. pokud řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje a řada $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konverguje absolutně, potom řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ konverguje absolutně

   Vše řádně zdůvodněte $(1,5$ bodu).

3. (a) Definujte metrický prostor, úplný metrický prostor a kontraktivní zobrazení (3 body).
   (b) Zformulujte Banachovu větu o kontrakci (1 bod).
   (c) Dokažte, že zobrazení $\rho_{\mathrm{MAX}} : C([0,2]) \times C([0,2]) \to \mathbb{R}$ definované jako

$$\rho_{\mathrm{MAX}}(f,g) = \max_{x\in[0,2]} |f(x) - g(x)|$$

   je metrikou na prostoru $C([0,2])$ (1 bod).
   (d) Dokažte následující tvrzení: nechť $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je kontraktivní zobrazení (vzhledem k obvyklé metrice na $\mathbb{R}^2$). Definujme zobrazení $\Phi : C([0,2]) \to C([0,2])$ jako

$$\Phi(f)(x) = \frac{1}{2}\int_0^x \phi(t, f(t))\, dt, \quad x \in [0,2].$$

   Potom Φ je kontrakce na prostoru $(C([0,2]), \rho_{\mathrm{MAX}})$ (3 body).